Ορισμός: Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται κάθε σχέση $f \subseteq A \times B$ για την οποία
(i) $\forall x \in A \; \exists y \in B \quad (x,y) \in f$
(ii) $\forall x \in A$ κ' $y, z \in B$ αν $(x,y) \in f$ κ' $(x,z) \in f$ τότε $y = z$

Δηλαδή συνάρτηση f από το A στο B είναι μια σχέση που κάθε $x \in A$ εμφανίζεται σε ένα ακριβώς από τα διατεταγμένα ζεύγη που αποτελούν την f. Για $x \in A$ το μοναδικό $y \in B$ για το οποίο $(x,y) \in f$ λέγεται τιμή της f στο x (ή εικόνα της f στο x) κ' συμβολίζεται με $f(x)$ (έτσι $x f y \Leftrightarrow f(x) = y$)

Για μια συνάρτηση $f \subseteq A \times B$ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $f: A \to B$ κ' λέμε ότι η f έχει π.ο. το A κ' π. τιμών το B

Ορισμός: Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση
(i) Λέμε ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη ή 1-1 αν $\forall x, y \in A$ ισχύει $(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$ [ή ισοδύναμα $\forall x, y \in A (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$]

(ii) Λέμε ότι η f είναι επί (του B) αν $\forall y \in B \; \exists x \in A \; f(x) = y$

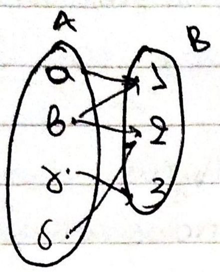
Συμβολισμός: Το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B παριστάνεται με $\mathcal{F}(A,B)$ ή B^A

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: (i) Αν $f: A \to B$, $g: A \to B$ δύο συναρτήσεις τότε $f = g$ αντν $f(x) = g(x) \; \forall x \in A$
(ii) Αν $f: A \to B$ συνάρτηση κ' $S \subseteq A$ τότε το σύνολο $\{(x, f(x)), x \in S\}$ ορίζει μια συνάρτηση $g: A \to B$ ώστε $g(x) = f(x) \; \forall x \in S$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται περιορισμός της f στο σύνολο S κ' συμβολίζεται $f \restriction S$ ή $f|_S$

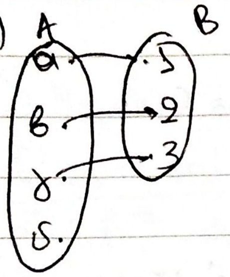
(iii) Αν $f: A \to B$ μια συνάρτηση κ' $\Gamma \supseteq A$ κ' $h: \Gamma \to B$ μια συνάρτηση ώστε να ισχύει $h(x)=f(x)$ $\forall x \in A$ λέμε ότι η h είναι μια επέκταση της f

(αx) (α)



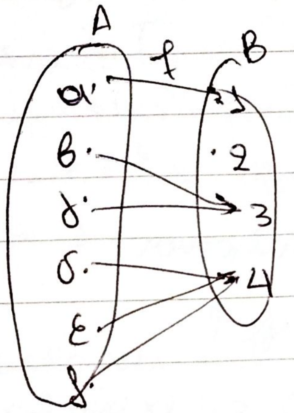
Η r δεν είναι συνάρτηση διότι $(\beta, 1)\in r$
$(\beta, 2)\in r$

(β)



Η r δεν είναι συνάρτηση διότι $\delta \in A$ αλλά $\nexists x\in B$ $(\delta, x)\in r$

(γ)



Η f είναι συνάρτηση

Η f δεν είναι 1-1, διότι $f(\beta)=f(\gamma)$

Η f δεν είναι επί διότι $2\in B$ αλλά $\nexists x\in A$ ώστε $f(x)=2$

(δ) $f=\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y=2x\}$ είναι συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, διότι $\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists$ μοναδικό $y\in\mathbb{R}$ (το $y=2x$) ώστε $(x,y)\in f$

$f(x)=2x$ λέγεται τύπος της συνάρτησης f.

(λέμε ότι το x είναι ανεξάρτητη μεταβλητή, το y (στον τύπο $y=2x$) είναι η εξαρτημένη μεταβλητή)

Η f είναι 1-1

Αν $x,y\in\mathbb{R}$ με $f(x)=f(y) \Rightarrow 2x=2y \Rightarrow x=y$

Η f είναι επί

Για τυχόν $y\in\mathbb{R}$ $\frac{y}{2}\in\mathbb{R}$ κ' $f(\frac{y}{2})=2\frac{y}{2}=y$

(ii) Μια συνάρτηση της οποίας το πεδίο τιμών είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ λέγεται πραγματική συνάρτηση

Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ κ' $f:A\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση

λέγεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.

Για μια τέτοια f μπορεί να γίνει η γραφική της παράσταση στο επίπεδο

$\{(x, f(x)), x\in A\}$

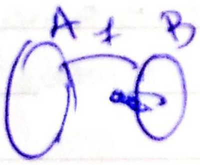
(iii) Αν $A\neq\emptyset, B\neq\emptyset$ $c\in B$

η $f:A\to B$ με $f(x)=c$ $\forall x\in A$ λέγεται σταθερή συν. με τιμή c

$(f=\{(x,c)\ x\in A\}=A\times\{c\})$

(iiii) Αν $A\neq\emptyset$ η συνάρτηση $f: A\to A$ με $f(x)=x, \forall x\in A$ λέγεται ταυτοτική συνάρτηση

Η f αυτή συμβολίζεται με I_A ή e_A



$f\subseteq A\times B$ λέγεται συνάρτηση

(i) $\forall x\in A$ $\exists y\in B$ $(x,y)\in f$

(ii) $\forall x\in A$ $\forall y_1,y_2\in B$ αν $(x,y_1)\in f$ κ' $(x,y_2)\in f$

τότε $y_1=y_2$

Πρόταση: Έστω $f:A\to B$ μια συνάρτηση

(i) Η αντίστροφη σχέση της f, (η $f^{-1}\subseteq B\times A$) είναι συνάρτηση αν η f είναι 1-1 κ' επί.

[Όταν συμβαίνει αυτό θα λέμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη]

(ii) Αν η f είναι 1-1 κ' επί (οπότε σύμφωνα με το (i) η f^{-1} είναι συνάρτηση $f^{-1}:B\to A$) τότε η $f^{-1}:B\to A$ είναι 1-1 κ' επί.

(i) Απόδειξη

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι η $f:A\to B$ είναι 1-1 κ' επί.
Ν.Ο. η $f^{-1}\subseteq B\times A$ είναι συνάρτηση.

(α) Αν $y\in B$, τότε εφόσον η f είναι επί $\exists x\in A$ ώστε $f(x)=y$, δηλ. $(x,y)\in f$.
άρα $(y,x)\in f^{-1}$

(β) Αν $x\in B$ κ' $y_1,y_2\in A$ ώστε $(x,y_1)\in f^{-1}$ κ' $(x,y_2)\in f^{-1}$, τότε $(y_1,x)\in f$ κ' $(y_2,x)\in f$, δηλ. $f(y_1)=x$ κ' $f(y_2)=x$.
Άρα $f(y_1)=f(y_2)$ κ' εφόσον η συνάρτηση f είναι 1-1 προκύπτει $y_1=y_2$
Επομένως, η f^{-1} είναι συνάρτηση.

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η $f^{-1}:B\to A$ είναι συνάρτηση. Ν.Δ.Ο η f είναι 1-1 κ' επί.
Η f είναι επί [Έστω $y\in B$. Τότε εφόσον η f^{-1} είναι συνάρτηση $\exists x\in A$ ώστε $(y,x)\in f^{-1}$, άρα $(x,y)\in f$ δηλ. $f(x)=y$]

Η f είναι 1-1 [Έστω $x_1,x_2\in A$ ώστε $f(x_1)=f(x_2)$.
Θέτουμε $y=f(x_1)=f(x_2)$. Τότε $(x_1,y)\in f$ κ' $(x_2,y)\in f$.
Άρα $(y,x_1)\in f^{-1}$ κ' $(y,x_2)\in f^{-1}$ εφόσον η f^{-1} είναι συνάρτηση προκύπτει ότι $x_1=x_2$]

[όταν συμβαίνει αυτό θα λέμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη]

(ii) Η f^{-1} είναι 1-1. Έστω $y_1,y_2\in B$ ώστε $f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2)$.
Θέτουμε $x=f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y_2)$. Εφόσον $f^{-1}(y_1)=x$ έχουμε $f(x)=y_1$
ενώ εφόσον $f^{-1}(y_2)=x$ έχουμε $f(x)=y_2$ } $y_1=y_2$

Η f^{-1} είναι επί:
[Έστω $x\in A$. Θέτουμε $y=f(x)$ (οπότε $y\in B$) τότε $f^{-1}(y)=x$]